Fiche 201   **Niveau : 2**   **Orange**

Le théorème de Müntz - Szász

1 Introduction

Une des activités principales de l'analyse est l'approximation de fonctions. De ce point de vue le théorème le plus célèbre est le théorème d'approximation de Weierstrass :

Théorème 1.1 *L'espace vectoriel des fonctions polynomiales est dense dans l'espace vectoriel* $C[a,b]$ *des fonctions continues sur un intervalle compact* $[a,b]$*, muni de la topologie de la convergence uniforme sur ce compact.*

Autrement dit, si on considère les fonctions particulières $1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$, la fermeture pour la topologie de la convergence uniforme sur $[a,b]$ de l'espace vectoriel engendré par ces fonctions est l'espace $C[a,b]$ tout entier. On dit que la famille $(1, x, \cdots, x^n, \cdots)$ est totale dans $C[a,b]$.
Si on considère maintenant la famille $(x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \cdots, x^{\lambda_n}, \cdots)$ on peut se poser la question suivante : à quelle condition cette famille est-elle totale dans $C[a,b]$? Le théorème de Müntz - Szász répond à cette question. On commencera par établir un théorème de densité pour l'espace $L^2[a,b]$ puis on établira le résultat pour $C[a,b]$.
Il existe diverses démonstrations de ce théorème. Celle que nous proposons ici n'utilise que des outils élémentaires (mais elle n'est pas simple pour autant) et suit l'exposé qui est fait sur cette question dans le livre de **Philip J. Davis** intitulé *Interpolation and Approximation (Blaisdell Publishing Compagny 1963).*

2 Problème

Partie I - Matrices et déterminants de Gram

Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert dont on note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire et $||\ ||$ la norme. Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des éléments de $\mathbf{H}$. On définit la matrice de Gram relative à ce système et son déterminant par :

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \cdots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle \end{pmatrix}$$

et

$$g(x) = \det\big(G(x_1, , x_2, \cdots, x_n)\big)\,.$$

1) On définit pour $1 \le i \le n$ le vecteur :

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j,$$

on note A la matrice $(a_{i,j})_{i,j}$ et $\tilde{A} = (\overline{a_{j,i}})_{i,j}$ sa trans-conjuguée.
Montrer que :

$$G(y_1, y_2, \cdots, y_n) = A\, G(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, \tilde{A}$$

et que :

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \left| \det(A) \right|^2 g(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

2) Nous allons montrer quelques propriétés de $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

a) Montrer que :

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0$$

et que $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ si et seulement si le système $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est lié.

b) Montrer que :

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq ||x_1||^2\, ||x_2||^2 \cdots ||x_n||^2$$

et que l'égalité a lieu si et seulement si le système $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est orthogonal.

c) Application à l'inégalité d'Hadamard. Soit $B = (b_{i,j})_{,j}$ une matrice à coefficients complexes où $|b_{i,j}| \leq M$. Montrer que :

$$|\det(B)| \leq M^n n^{n/2}.$$

3) On suppose maintenant que les vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont linéairement indépendants. On note $E = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ le sous-espace de dimension n engendré par ces vecteurs. Si $y \in \mathbf{H}$ on note $\delta_E(y)$ la distance de y au sous-espace vectoriel E.
Montrer que :

$$\delta_E(y)^2 = \frac{g(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)}{g(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

et que le vecteur z de E qui réalise $||y - z|| = \min_{x \in E} ||y - x||$ est donné par :

$$z = \frac{-1}{g(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle & \langle x_1, y \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle & \langle x_2, y \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle & \langle x_n, y \rangle \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Partie II - Le théorème de Müntz - Szász

1) Déterminant de Cauchy. Nous utiliserons dans la suite un déterminant de Cauchy, C'est-à-dire un déterminant de la forme :

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

où les dénominateurs sont non nuls. Montrer que :

$$D_n = \frac{\prod_{i>j\geq 1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i,j=1}^{n} (a_i + b_j)}.$$

2) Soit $(p_i)_{i\geq 1}$ une suite de nombres réels deux à deux distincts tels que $p_i > -\frac{1}{2}$. Soit q un nombre réel tel que $q > -\frac{1}{2}$. On pose :

$$\delta = \min_{\{a_k\}_{k=1\cdots n}} \left(\int_0^1 |x^q - a_1 x^{p_1} - a_2 x^{p_2} - \cdots - a_n x^{p_n}|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que :

$$\delta^2 = \frac{1}{2q+1} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i - q}{p_i + q + 1} \right)^2.$$

3) Soit $(x^p)_{p\in\mathcal{I}}$ une famille infinie de fonctions puissance distinctes où $p > -\frac{1}{2}$. Montrer que pour que cette famille soit totale dans l'espace $L^2[0,1]$ muni de la norme habituelle

$$||f||_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2}$$

il faut et il suffit que la famille des exposants contienne une suite p_i telle que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

1. $\lim_{i\to\infty} p_i = -\frac{1}{2}$ et $\sum_{i=1}^{+\infty} \left(p_i + \frac{1}{2}\right) = +\infty$.
2. $\lim_{i\to\infty} p_i = p$ avec $-\frac{1}{2} < p < +\infty$.
3. $\lim_{i\to\infty} p_i = +\infty$, $p_i \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty$.

4) Soit $(x^p)_{p\in\mathcal{I}}$ une famille infinie de fonctions puissance distinctes où $p \geq 0$. Montrer que pour que cette famille soit totale dans l'espace $C[0,1]$ muni de la norme uniforme

$$||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

il suffit que l'un des exposants p soit nul et que la famille des exposants contienne une suite p_i telle que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

1. $\lim_{i\to\infty} p_i = +\infty$, $p_i \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty$.
2. $\lim_{i\to\infty} p_i = p$ avec $0 < p < +\infty$.

3 Solution

Partie I - Matrices et déterminants de Gram

1) Faisons le calcul explicite (et bestial) du coefficient $d_{i,j}$ de la matrice $A\,G(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\tilde{A}$. Pour cela commençons par calculer le coefficient $c_{i,j}$ du produit $A\,G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \langle x_k, x_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k, x_j \right\rangle = \langle y_i, x_j \rangle.$$

On obtient alors :

$$d_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} c_{i,s} \overline{a_{j,s}} = \sum_{s=1}^{n} \overline{a_{j,s}} \langle y_i, x_j \rangle = \left\langle y_i, \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{j,s}} x_s \right\rangle = \langle y_i, y_j \rangle.$$

On obtient bien le coefficient d'indice (i,j) de la matrice $G(y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

De cette formule on tire pour le déterminant :

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \det(A) g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \det(\tilde{A}).$$

Mais comme $\det(\tilde{A}) = \overline{\det(A)}$ on obtient en définitive :

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = |\det(A)|^2 \, g(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

2) Quelques propriétés de $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

a) Soit $E = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Soit E_n un sous espace de dimension n contenant E. Considérons une base orthonormée $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ de E_n. Alors $g(u_1, u_2, \cdots, u_n) = 1$. Par ailleurs, tout vecteur x_i se décompose sur la base $(u_j)_j$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} u_j.$$

où $a_{i,j} = \langle x_i, u_j \rangle$. Soit A la matrice dont les coefficients sont les $a_{i,j}$. Cette matrice a pour vecteurs colonnes les vecteurs x_i (décomposés dans la base $(u_j)_j$). En conséquence le determinant de A est nul si et seulement si les vecteurs x_i sont liés. Or :

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = |det(A)|^2 g(u_1, u_2, \cdots, u_n) = |det(A)|^2.$$

Donc :

1. $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0$,
2. $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ si et seulement si les vecteurs x_i sont liés.

b) Soit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des vecteurs linéairement indépendants
(sinon on sait que $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$).
Rappelons la méthode d'orthonormalisation de Schmidt : on construit par récurrence :

$$y_1 = \frac{x_1}{||x_1||}$$

et pour tout $j \geq 2$:

1. E_{j-1} est le sous-espace engendré par $x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}$
   (ou ce qui revient au même par $y_1, y_2, \cdots, y_{j-1}$).
2. z_j est le vecteur x_j dont on soustrait sa projection orthogonale sur E_{j-1} :

   $$z_j = x_j - P_{E_{j-1}}(x_j),$$

   puis,

   $$y_j = \frac{z_j}{||z_j||}.$$

Ainsi les vecteurs $y_1, y_2, \cdots, y_n$ forment un système orthonormé et pour tout $1 \leq j \leq n$ on a :

$$[x_1, x_2, \cdots, x_j] = [y_1, y_2, \cdots, y_j].$$

De ce fait, la matrice A qui exprime les y_i en fonction des x_j est une matrice triangulaire inférieure. On a donc :

$$|\det(A)|^2 = |a_{1,1}|^2 |a_{2,2}|^2 \cdots |a_{n,n}|^2$$

et donc :
$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{|a_{1,1}|^2|a_{2,2}|^2 \cdots |a_{n,n}|^2}.$$
Remarquons que le coefficient $a_{j,j}$ est le coefficient de x_j dans l'expression de y_j en fonction de $x_1, x_2, \cdots, x_j$. On a donc :
$$a_{j,j} = \frac{1}{||x_j - P_{E_{j-1}}(x_j)||},$$
d'où :
$$\frac{1}{a_{j,j}} = ||x_j - P_{E_{j-1}}(x_j)|| \leq ||x_j||,$$
l'égalité ayant lieu, si et seulement si la projection de x_j sur E_{j-1} est nulle, c'est-à-dire si et seulement si x_j est orthogonal à tous les x_i où $i < j$.
On en conclut que :
$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq ||x_1||^2\, ||x_2||^2 \cdots ||x_n||^2,$$
l'égalité ayant lieu si et seulement si les vecteur x_i forment un système orthogonal.

Remarquons que cette démonstration indique l'interprétation géométrique suivante : le déterminant $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est le carré de l'hypervolume dans l'espace à n dimensions de l'hyperparallélépipède construit sur les vecteurs x_i.

c) Soit $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ un système orthonormée. On définit les vecteurs
$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} u_j.$$
Alors on sait d'après les résultats précédents que :
$$0 \leq g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = |\det(B)|^2 \leq ||x_1||^2\, ||x_2||^2 \cdots ||x_n||^2.$$
Mais comme la base $(u_j)_j$ est orthonormée,
$$||x_i||^2 = \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}|^2 \leq nM^2.$$
Donc :
$$||x_1||^2\, ||x_2||^2 \cdots ||x_n||^2 \leq (nM^2)^n,$$
et par suite :
$$|\det(B)| \leq M^n n^{\frac{n}{2}}.$$

3) Soit $E = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$. En vertu de la formule démontrée à partir de la méthode d'orthonormalisation de Schmidt au I-2)b) on peut écrire :
$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = g(x_1, x_2, \cdots, x_n,)||y - P_E(y)||^2.$$
Mais $||y - P_E(y)||^2$ est le carré de la distance de y au sous espace E, ce qui prouve la formule :
$$\delta_E(y)^2 = \frac{g(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)}{g(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$
Soit $z = P_E(y)$ la projection orthogonale de y sur le sous-espace E. On a $y = z + (y - z)$ et $y - z$ est orthogonal à E. En cnséquence pour tout x_i on a
$$\langle y, x_i \rangle = \langle z, x_i \rangle$$

et ceci caractérise z parmi tous les points de E. Si nous écrivons z sous la forme :

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

alors les coordonnées $a_1, a_2, \cdots a_n$ sont la solution du système :

$$\begin{array}{lcl} a_1\langle x_1, x_1\rangle + a_2\langle x_1, x_2\rangle \cdots + a_n\langle x_1, x_n\rangle & = & \langle x_1, y\rangle \\ \cdots & = & \cdots \\ \cdots & = & \cdots \\ a_1\langle x_n, x_1\rangle + a_2\langle x_n, x_2\rangle \cdots + a_n\langle x_n, x_n\rangle & = & \langle x_n, y\rangle \end{array}.$$

Les formules de Cramer nous donnent les valeurs des a_i sous la forme du quotient de déterminants :

$$a_i = \frac{\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_1, y\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \cdots & \langle x_2, y\rangle & \cdots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \cdots & \langle x_n, y\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}}{g(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

D'un autre côté, si on développe suivant la dernière ligne :

$$\frac{-1}{g(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle & \langle x_1, y\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \cdots & \langle x_2, x_n\rangle & \langle x_2, y\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \langle x_n, x_1\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle & \langle x_n, y\rangle \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix}$$

en tenant compte des valeurs de a_i calculées par les formules de Cramer, on trouve bien $\sum_{i=1}^n a_ix_i$.

Partie II - Le théorème de Müntz - Szász

1) Le déterminant de Cauchy. Considérons les a_i et les b_j comme des variables indépendantes. Les dénominateurs sont donc des polynômes homogènes de degré 1, tandis que les numérateurs sont des polynômes de degré 0. Le déterminant D_n est donc une fraction rationnelle de degré $-n$. Le dénominateur commun est

$$\prod_{i,j=1}^{n} (a_i + b_j)$$

de degré n^2, donc

$$D_n = \frac{P_n(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)}{\prod_{i,j}(a_i + b_j)},$$

où $P_n(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$ est un polynôme de degré $n^2 - n$. Si $a_i = a_j$ (avec $i \neq j$) alors deux colonnes sont identiques et $D_n = 0$. Il en est de même si $b_i = b_j$. En conséquence $P_n(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$ est multiple du polynôme :

$$\prod_{i>j\geq 1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j).$$

Or ce dernier polynôme est exactement de degré $n^2 - n$. En conséquence :

$$D_n = c_n \frac{\prod_{i>j\geq 1}^{n}(a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i,j=1}^{n}(a_i + b_j)}$$

où c_n est une constante. Il reste à montrer que cette constante est 1. Remarquons que :

$$a_nD_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_n}{a_n+b_1} & \frac{a_n}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{a_n}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

d'où on tire tout d'abord que :

$$\lim_{a_n \to +\infty} a_nD_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

puis :

$$\lim_{b_n \to +\infty} \lim_{a_n \to +\infty} a_nD_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Par conséquent :

$$\lim_{b_n \to +\infty} \lim_{a_n \to +\infty} \frac{a_nD_n}{D_{n-1}} = 1 = \frac{c_n}{c_{n-1}}.$$

Comme il est facile de voir que $c_1 = 1$ on conclut que pour tout n on a $c_n = 1$.

2) Les conditions $p_i > -\frac{1}{2}$ et $q > -\frac{1}{2}$ nous permettent de dire que les fonctions x^q et x^{p_i} sont dans $L^2[0,1]$. C'est dans cet espace de Hilbert que nous allons nous placer maintenant. Appliquons la formule :

$$\delta^2 = \delta_E(y)^2 = \frac{g(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)}{g(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

Calculons les produits scalaires :

$$\langle x^p, x^q \rangle = \int_0^1 x^p x^q dx = \frac{1}{p+q+1}.$$

En conséquence les deux déterminants $g(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ et $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont des déterminants de Cauchy qu'on sait calculer :

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = \frac{\prod_{i>j=1}^n (p_i - p_j)^2}{\prod_{i,j=1}^n (p_i + p_j + 1)},$$

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = \frac{\prod_{i>j=1}^n (p_i - p_j)^2 \prod_{i=1}^n (q - p_i)^2}{(q+q+1)\prod_{i,j=1}^n (p_i + p_j + 1) \prod_{i=1}^n (q + p_i + 1)^2},$$

et donc :

$$\delta^2 = \frac{\prod_{i=1}^n (q - p_i)^2}{(2q+1)\prod_{i=1}^n (q + p_i + 1)^2}.$$

3) Nous allons étudier ce qu'il se passe dans les trois cas prévus.

1. $\lim_{i\to\infty} p_i = -\frac{1}{2}$ et $\sum_{i=1}^{+\infty}\left(p_i+\frac{1}{2}\right) = +\infty$. Écrivons :

$$\frac{\prod_{i=1}^n (q-p_i)^2}{\prod_{i=1}^n (q+p_i+1)^2} = \frac{\prod_{i=1}^n \left(1-\frac{p_i+\frac{1}{2}}{q+\frac{1}{2}}\right)^2}{\prod_{i=1}^n \left(1+\frac{p_i+\frac{1}{2}}{q+\frac{1}{2}}\right)^2}.$$

Comme $p_i \to -\frac{1}{2}^+$ on a pour i suffisamment grand

$$0 < \left(1-\frac{p_i+\frac{1}{2}}{q+\frac{1}{2}}\right) < 1,$$

et donc le numérateur :

$$\prod_{i=1}^n \left(1-\frac{p_i+\frac{1}{2}}{q+\frac{1}{2}}\right)^2$$

est borné. D'un autre côté le dénominateur :

$$\prod_{i=1}^n \left(1+\frac{p_i+\frac{1}{2}}{q+\frac{1}{2}}\right)^2$$

diverge vers $+\infty$ car la série :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{p_i+\frac{1}{2}}{q+\frac{1}{2}}$$

est divergente. On conséquence le quotient tend vers 0, ce qui montre que toute fonction x^q ($q \geq 0$) est approchée par une suite de points du sous espace engendré par les x^{p_i}. Comme les x^q pour q entier ≥ 0 forment une suite totale dans $L^2[0,1]$, il en est de même de la famille x^{p_i}.

2. $\lim_{i\to\infty} p_i = p$ avec $-\frac{1}{2} < p < +\infty$. Alors :

$$\lim_{i\to\infty} \frac{p_i-q}{p_i+q+1} = \frac{p-q}{p+q+1}.$$

Or pour $p > -\frac{1}{2}$ et $q \geq 0$ il est facile de voir que :

$$-1 < \frac{p-q}{p+q+1} < 1.$$

Soit

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2}\left(1-\left|\frac{p-q}{p+q+1}\right|\right).$$

Il existe n tel que pour tout $i \geq n$ on ait :

$$\left|\frac{p_i-q}{p_i+q+1} - \frac{p-q}{p+q+1}\right| \leq \epsilon,$$

et donc :

$$\left|\frac{p_i-q}{p_i+q+1}\right| < 1-\epsilon.$$

Le produit :

$$\frac{\prod_{i=1}^n (q-p_i)^2}{(2q+1)\prod_{i=1}^n (q+p_i+1)^2}$$

converge donc vers 0 ce qui montre que pour tout $q \geq 0$ x^q peut être approché par une suite d'éléments de $[x^{p_i}]$. Comme la famille x^q (q entier ≥ 0) est totale dans $L^2[0,1]$ il en est de même de la famille x^{p_i}.

3. $\lim_{i\to\infty} p_i = +\infty$, $p_i \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty$. Dans ce cas on écrit :

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}(q-p_i)^2}{\prod_{i=1}^{n}(q+p_i+1)^2} = \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{q}{p_i}\right)^2}{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{q+1}{p_i}\right)^2}.$$

Le numérateur reste borné, tandis que le produit du dénominateur diverge vers $+\infty$. On conclut comme dans les deux cas précédents.

Réciproquement, si la famille x^{p_i} est totale on doit montrer qu'on se trouve dans un des trois cas précédents. Si la famille des exposants p ne contient aucune sous-suite réalisant l'une des trois conditions prévues, c'est que on est dans un des cas suivants :

1. la famille (p) est une suite p_i telle que

$$\lim_{i\to+\infty} p_i = -\frac{1}{2}$$

avec

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(p_i+\frac{1}{2}\right) < +\infty.$$

2. la famille (p) est une suite p_i telle que

$$\lim_{i\to+\infty} p_i = +\infty$$

avec

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{p_i} < +\infty.$$

3. la famille (p) est une suite p_i qui se décompose en deux sous-suites, l'une du premier type, l'autre du deuxième type.

Choisissons un entier $q \geq 0$ différent de tous les p_i. Les calculs faits dans la partie directe de la démonstration montrent que dans aucun de ces cas, x^q peut être approché aussi près qu'on veut par une combinaison linéaire des x^{p_i}.

4) Soit $n > 0$ et $p_i > 0$, alors

$$\left|x^n - \sum_{i=1}^{k} a_i x^{p_i}\right| = n\left|\int_0^x \left(t^{n-1} - \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i p_i t^{p_i-1}}{n}\right)dt\right|$$

$$\leq n\int_0^1 \left|t^{n-1} - \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i p_i t^{p_i-1}}{n}\right| dt$$

$$\leq n\left(\int_0^1 \left|t^{n-1} - \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i p_i t^{p_i-1}}{n}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On voit par cette dernière inégalité qu'on va faire reposer la bonne approximation dans $C[0,1]$ des éléments de $C[0,1]$ par des combinaisons linéaires des x_{p_i} par la bonne approximation dans $L^2[0,1]$ de ces éléments par des combinaisons linéaires des x_{p_i-1}. Étudions alors les deux cas indiqués pour cette partie :

1. $\lim_{i\to\infty} p_i = +\infty$, $p_i \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty$. Avec cette hypothèse les x^{p_i-1} vérifient la condition 3) du résultat de la section précédente. On conclut que la famille x_{p_i-1} est totale dans $L^2[0,1]$. Conjugué avec l'inégalité précédente ce résultat implique que tout x^n où $n > 0$ peut être approché par une combinaison linéaire des x_{p_i}. Si en plus on a un des p qui est nul, alors 1 est aussi approché (et même atteint), donc en vertu du théorème de Weiersrtrass (les x^n où $n \geq 0$ forment une famille totale dans $C[0,1]$) les x_{p_i} forment aussi une famille totale dans $C[0,1]$.
2. $\lim_{i\to\infty} p_i = p$ avec $0 < p < +\infty$. Dans ce cas si $p > \frac{1}{2}$ on est de nouveau dans un cas d'application du résultat de la section précédente. On conclut que la famille x_{p_i-1} est totale dans $L^2[0,1]$, puis que les x_{p_i} forment une famille totale dans $C[0,1]$. Si $p \leq \frac{1}{2}$ on ne peut appliquer directement les résultats de la section précédente car $p-1 \leq -\frac{1}{2}$. On travaille alors avec la famille x^{cp_i} où c est une constante > 0 telle que $cp_i > \frac{1}{2}$. Cette famille est alors comme on vient de voir totale dans $C[0,1]$. Comme l'application de $[0,1]$ dans lui même qui à x fait correspondre x^c est bijective en faisant le changement de variable $x' = x^c$ on déduit que la famille x'^{p_i} est totale dans $C[0,1]$, ce qu'on voulait prouver.

Auteur : Robert Rolland
Diffusé par l'Association ACrypTA